

Unterrichtseinheit: Trigonometrie

Winkelberechnungen – Teil 2



Abbildung 1: Hausdach (Quelle: ZVDH)



Schon gewusst?

Als Eselsbrücke für die Bildung des Kosinussatzes kann man sich merken: Der Winkel, der der gesuchten Seite gegenüber liegt, gehört ans „Ende“ der Formel.

Berechnungen an nicht-rechtwinkligen Dreiecken

Für die Berechnung von nicht-rechtwinkligen Dreiecken wendet man den **Kosinussatz** oder den **Sinussatz** an.

Kosinussatz

Der Kosinussatz verwendet die **Funktion cos** zur Berechnung von Seiten. Für jede Seite gibt es eine Formel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \rightarrow b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)}$$

Aufgabe 1 ☆

Bestimme anhand der Angaben die passende Formel für die Berechnung der fehlenden Seite.

1. **Dreieck ABC mit den Angaben** $a = 43\text{cm}; b = 56\text{cm}; \gamma = 21^\circ$
2. **Dreieck ABC mit den Angaben** $b = 27\text{cm}; c = 51\text{cm}; \alpha = 46^\circ$
3. **Dreieck ABC mit den Angaben** $a = 57\text{cm}; c = 57\text{cm}; \beta = 60^\circ$

Aufgabe 2 ☆☆

Berechne die fehlenden Seiten aus Aufgabe 1.

Entsprechend lassen sich ebenfalls die Winkel durch Umstellung der Sätze und Gegenfunktion von cos (siehe vorherige Seiten) berechnen:

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \alpha$$

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) = \beta$$

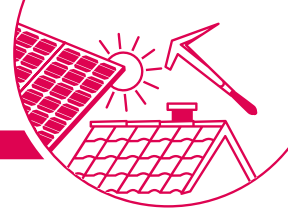
$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \gamma$$



Schon gewusst?

Formeln sind einfach anzuwenden:

1. Ermittle den zu suchenden Wert.
2. Finde die passende Formel.
3. Setze die bekannten Werte ein.
4. Trage die Formel (hervorgehoben) mit den Werten in den Taschenrechner ein.



Aufgabe 3 ☆☆☆

Berechne zu den folgenden Dreiecken die Winkel.

1. **Dreieck ABC mit den Seiten** $a = 53\text{cm}$; $b = 65\text{cm}$; $c = 15\text{cm}$
2. **Dreieck ABC mit den Seiten** $a = 32\text{cm}$; $b = 32\text{cm}$; $c = 51\text{cm}$
3. **Dreieck ABC mit den Seiten** $a = 75\text{cm}$; $b = 75\text{cm}$; $c = 75\text{cm}$

Sinussatz

Der Sinussatz verwendet die **Funktion sin** zur Berechnung. Die Aufstellung der Sinussätze lässt sich aus Verhältnissen und Zusammenhängen herleiten. Hierbei hängt die Seite mit dem gegenüberliegenden Winkel zusammen: $a \rightarrow \alpha$; $b \rightarrow \beta$; $c \rightarrow \gamma$



Schon gewusst?

Beim Aufstellen der Formel ist es am besten, die gesuchte Seite im Zähler anzugeben.

Verhältnisse schreibt man in der Regel als Bruch. Zusammen mit *sin* ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}, \frac{a}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}, \frac{b}{c} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

Daraus ergeben sich verschiedene Kombinationsmöglichkeiten, fehlende Seiten und Winkel durch Umstellung der Beziehung zu berechnen. Für die Berechnung der Seite a würden sich aus der Beziehung $\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$

beispielsweise die Kombinationen als Formel $a = \frac{b}{\sin(\beta)} \cdot \sin(\alpha)$ durch folgende Umstellung ergeben:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad | \cdot b$$

$$a = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \cdot b$$

Aufgabe 4 ☆

Ermittle eine weitere Kombination als Formel für die Seite a. Stelle die Formeln für die Seite b und c auf.



Schon gewusst?

Umstellung des Sinussatzes zur Berechnung von Winkeln (am Beispiel a):

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b} \quad | \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{b} \cdot \sin(\beta) \rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{a}{b} \cdot \sin(\beta)\right) = \alpha$$

Aufgabe 5 ☆☆

Gegeben sind in einem Dreieck ABC die Seitenlängen $a = 5\text{cm}$, $b = 7\text{cm}$ und der Winkel $\beta = 45^\circ$. Berechne die Länge der Seite c.

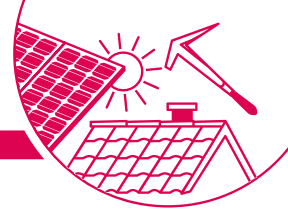
Aufgabe 6 ☆☆☆

Berechne zu einem Dreieck ABC zu den folgenden Seiten $a = 8\text{cm}$, $b = 15\text{cm}$ und $c = 17\text{cm}$ die Winkel α , β und γ .



Schon gewusst?

In der Trigonometrie darf bei rechtwinkligen Dreiecken ebenfalls der Satz des Pythagoras angewendet werden.



Auf dem Dach: Winkelberechnung



Abbildung 2: Hausdach (Quelle: ZVDH)



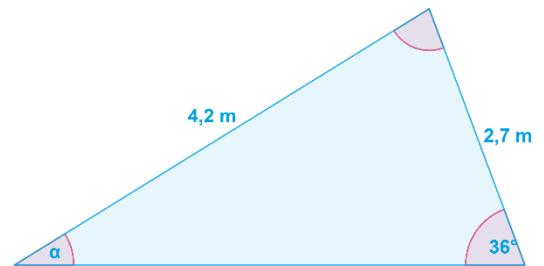
Schon gewusst?

Die Dachneigung wird u.a. bestimmt, um das Material für die Dacheindeckung festzulegen. Grundsätzlich kann je nach Dachneigung zwischen Flachdach, flachgeneigtem Dach und Steildach unterschieden werden.

Aufgabe 7 ☆☆☆

Es ist die folgende Dachform (rechts) gegeben:

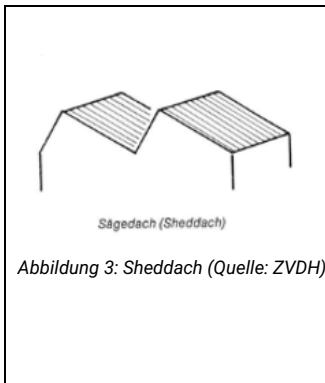
1. Berechne den Neigungswinkel α .
2. Berechne die fehlende Seite.



Aufgabe 8 ☆☆☆

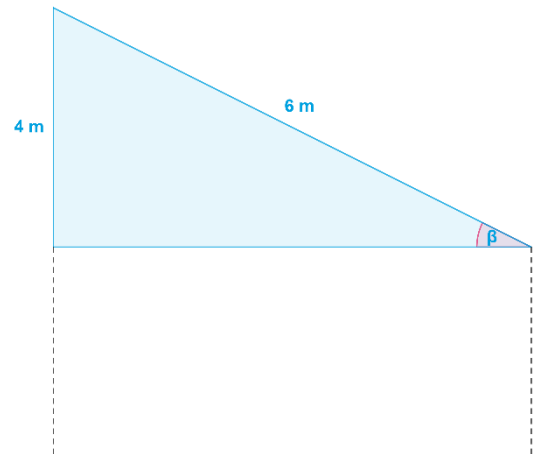
Die nebenstehende Grafik stellt eine Skizze zu einem Sheddach dar.

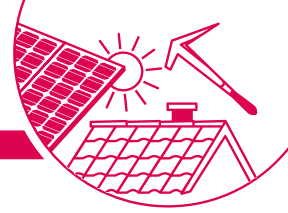
1. Berechne den Neigungswinkel β .
Berechne die fehlende Seite.



Schon gewusst?

Ein Sheddach, wegen seiner Form auch Sägezahndach genannt, ist eine besondere Form eines geneigten Daches. Es besteht aus mehreren Dächern. Das Sheddach wird vor allem bei Gebäuden mit großen Dachflächen wie Museen und Fabriken eingesetzt. Finde heraus, ob es in deiner Nähe ein Gebäude mit einem Sheddach gibt.





Aufgabe 9 ☆☆☆☆

Ein altes Fachwerkhaus soll renoviert werden. Das Dach ist undicht geworden. Vor Beginn der Arbeiten müssen genaue Abmessungen des Daches vorgenommen werden. Insbesondere die Höhe des Daches und die Breite des Hauses sind wichtig, um die benötigten Materialien abschätzen und die Länge der Dachsparren bestimmen zu können. Hilf bei den Berechnungen, damit die Sanierung so durchgeführt werden kann, dass das Haus trocken bleibt.

1. Berechne die Höhe h des Daches.
2. Berechne die Breite des Hauses.



Abbildung 4: Fachwerkhaus (Quelle: Adobe Stock)

Aufgabe 10 ☆☆☆☆

Bei einem Fachwerkhaus soll das Dach und die Fassade bis zu dem Parterre renoviert werden. Das Haus ist 8m breit und 10m lang. Die Fassade misst von dem Parterre bis zur Dachspitze 6m.

1. Berechne die Breite des Daches.
2. Berechne den Neigungswinkel.

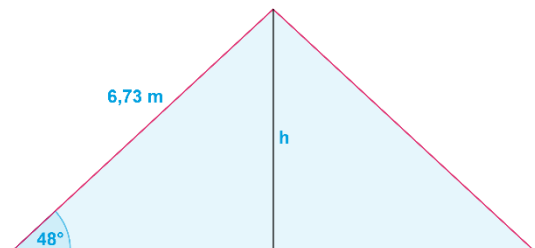
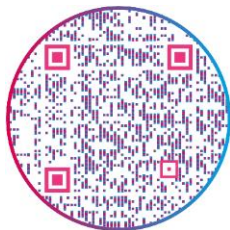


Abbildung 5: Abmessung des Daches

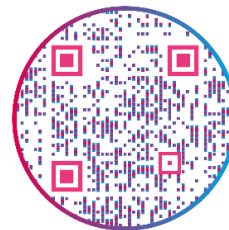
Recherche-Profis: Dachmaterialien und Dachneigung

Die Dachneigung spielt bei der Wahl der Materialien eine entscheidende Rolle, aber warum? Eure Aufgabe ist es, genau das herauszufinden.

3. Was ist eine Dacheindeckung? Findet heraus, was man unter Dacheindeckung versteht und welche Rolle sie beim Schutz des Hauses spielt.
4. Welche Materialien können verwendet werden? Recherchiert, mit welchen Materialien Dächer gedeckt werden können.
5. Warum hängt die Wahl des Materials von der Neigung des Daches ab? Recherchiert, warum ein Zusammenhang besteht, und findet ein Beispiel, an dem ihr die Abhängigkeit erklären könnt.
6. Diskutiert in der Klasse, welche Faktoren Dachdeckerinnen und Dachdecker bei der Materialauswahl noch berücksichtigen müssen (Tipp: Wetterbedingungen, Lebensdauer etc.).
7. Sucht euch ein Dach in eurer Umgebung aus und macht ein Foto davon. Findet heraus, welches Material für dieses Dach verwendet wurde. Stellt eine Vermutung zur Materialauswahl auf. Informiert euch bei einem Dachdecker-Betrieb in eurer Nähe, welche Überlegungen bei der Auswahl eine Rolle gespielt haben könnten.



Recherche-Grundlage: Rund ums Dach



Recherche-Grundlage: Dacheindeckung

Bildnachweise:

Abbildung 1: Bilddatenbank ZVDH

Abbildung 2: Bilddatenbank ZVDH

Abbildung 3: https://dachdecker.org/download/a2ah189g94esslftofpg6bf362t/Faktenblatt_Dachformen_8_2019-final.pdf

Abbildung 4: <https://stock.adobe.com/de/images/restauriertes-fachwerkhaus-mit-muhlrad-in-wechterswinkel-vor-der-rhon/530330482>

Grafiken: erstellt mit GeoGebra®, von Christian Leeser (<https://www.geogebra.org/?lang=de>)