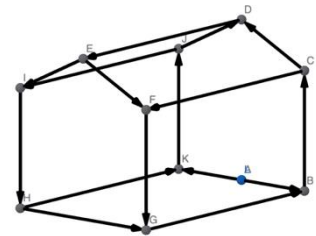


Unterrichtseinheit: Analytische Geometrie und Vektorrechnung: Dächer konstruieren

Vektoren und wie man damit ein Haus skizziert

Denken Sie sich in ein riesiges Koordinatensystem hinein: Wie finden Sie sich darin zurecht? Genau diese Frage führt Sie zu den Grundlagen, die selbst beim Entwurf und Bau von Häusern und vor allem Dächern eine zentrale Rolle spielen.



Skizze Hausbau (© erstellt mit GeoGebra)

AUFGABE 1 – Richtungsbestimmung ☆

Wenn Sie von einem Punkt zu einem anderen kommen wollen, ist die einfachste Beschreibung wohl diejenige, bei der man individuell für jede Richtung sagt, wie weit man gehen muss. Um von dem Punkt $(1|0|0)$ zu dem Punkt $(2|0|-1)$ zu kommen, müssen Sie in x-Richtung einen Schritt nach vorne, in y-Richtung keinen und in z-Richtung einen Schritt rückwärts machen. Diese „Verbindungen“ von Punkten nennt man **Vektoren**. Der eben behandelte Vektor sieht wie folgt aus: $(1,0,-1)$. Die erste Zahl meint also den x-Wert (oder x-Komponente) des Vektors, die zweite den y-Wert und so weiter. Sie können sich die Vektoren wie Pfeile von einem Punkt zum anderen vorstellen.

- a) Denken Sie sich für Ihre Sitznachbarin oder Ihren Sitznachbarn drei Punkte-Paare aus und geben Sie jeweils die Verbindungsvektoren für diese Punktepaare an.

Mit den Verbindungen von Punkten kann man auch hervorragend angeben, wie Dinge im Raum liegen; dafür geben Sie an, wie weit Sie in welche Richtung vom Nullpunkt aus gehen müssen, um bei dem gefragten Punkt anzukommen.

- b) Schauen Sie sich erneut Aufgabe 1a) an. Geben Sie hierfür die Ortsvektoren zu den ersten zwei Punkten an, die bei Ihnen vorkamen.

AUFGABE 2 – Rechnen mit Vektoren ☆ ☆

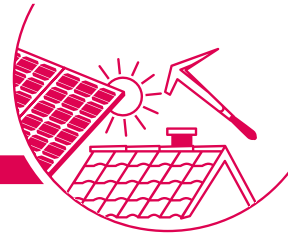
Begeben Sie sich gedanklich in folgendes Szenario: Ausgehend vom Ursprung sollen zunächst vier Schritte in Richtung z ausgeführt werden, ohne eine Bewegung in x- oder y-Richtung. Jetzt wollen Sie aber doch weiter, und zwar einen Schritt zurück in z-Richtung und 2 Schritte in y-Richtung. Und von dort dann 4 Schritte in y-Richtung, um am letzten interessanten Punkt anzukommen.

- a) Geben Sie alle involvierten Vektoren an. Analysieren Sie die auftretenden Zahlen. Erkennen Sie ein Rechenmuster? Vielleicht haben Sie herausgefunden, dass das „Nacheinander-Abgehen“ von Bewegungsanweisungen nichts anderes als komponentenweise Plusrechnung ist. Das können Sie dann auch so aufschreiben, zum Beispiel den ersten Rechenschritt:

$$(0,0,0) + (0,0,4) = (0,0,4)$$

- b) Stellen Sie jeden der oben gemachten Rechenschritte als Rechnung mit Vektoren dar und überprüfen Sie in jeder Komponente die Richtigkeit.
- c) Genauso können Sie auch die Subtraktion komponentenweise umsetzen und schreiben. Gehen Sie zurück zu Aufgabe 1 und beschreiben Sie Ihre Kopfrechenschritte mithilfe des neu erlernten Vokabulars. Stellen Sie anschließend diese Schritte als Rechnung von Vektoren dar.





AUFGABE 3 – Hausbau in GeoGebra ☆ ☆ ☆

Um ein 3D-Haus mit Vektoren zu erstellen, öffnen Sie auf Ihrem Laptop oder Tablet GeoGebra im 3D-Rechner-Modus. Unter „Werkzeuge“ → „mehr“ finden Sie die Möglichkeit, Punkte und Vektoren grafisch darzustellen.

- **Schritt 1:** Geben Sie die folgenden Punkte im Fenster „Algebra“ ein (z.B. $A = (0,0,0)$) und verbinden Sie sie anschließend in dieser Reihenfolge mit den Vektoren:
 $(0,2,0)$, $(0,2,3)$, $(0,0,4)$, $(6,0,4)$, $(6,2,3)$, $(6,2,0)$
- **Schritt 2:** Notieren Sie sich Ihre Schritte sowohl als Satz (z. B. ich gehe von $(0,0,0)$ nach $(0,2,0)$, also in y-Richtung zwei Schritte) als auch als Rechnung (z.B. $(0,0,0) + (0,2,0) = (0,2,0)$).
- **Schritt 3:** Wiederholen Sie das Verfahren, aber setzen Sie vor alle y-Werte ein Minuszeichen. Welche Veränderung stellen Sie fest?
- **Schritt 4:** Finden Sie heraus, welche Vektoren noch fehlen, um das Haus zu vervollständigen. Berechnen Sie die fehlenden Vektoren mithilfe der anliegenden Ortsvektoren.



Die GeoGebra-Software unterscheidet nicht zwischen Punkten und ihren Ortsvektoren, das heißt Sie können hier „Punkt plus Vektor“ rechnen. Formal darf man aber nur Vektoren addieren, Punkte nicht.



Schon gewusst?

Das Haus, das Sie gerade in GeoGebra konstruiert haben, ist noch nicht vollständig – es fehlt das Dach.

Auch um dessen Form zu bestimmen sind Vektoren zentral. In der Praxis – etwa im Dachdecker-Handwerk – können Vektoren verwendet werden, um die optimale Dachneigung zu berechnen, verschiedene Giebelformen zu konstruieren oder den Materialbedarf zu bestimmen. Zusammengefasst: Unter anderem liefert die Vektorrechnung die mathematischen Werkzeuge, um geometrische und räumliche Problemstellungen im Dachdecker-Handwerk zu lösen, besonders bei Neigungs- und Längenberechnungen sowie bei der Flächenbestimmung geneigter Flächen.