

## Unterrichtseinheit: Analytische Geometrie und Vektorrechnung: Dächer konstruieren

### Dachformen und skalare Vielfache von Vektoren

Wie wird ein Vektor multipliziert? Wenn Sie sich noch erinnern, wie man sich das Multiplizieren in der Grundschule erklärt hat, kennen Sie die Antwort vielleicht schon. Was das mit Dachtypen zu tun hat und wie man damit den Mittelpunkt zweier Punkte berechnet, finden Sie jetzt heraus.

#### AUFGABE 1 – das Doppelte eines Vektors und skalare Vielfache ☆ ☆

Wenn Sie Erstklässlern erklären wollen, warum bei der Rechnung  $3 \cdot 5$  die Zahl 15 herauskommt, würden Sie vermutlich irgendetwas in diese Richtung sagen:

„Stellen wir uns vor, wir haben fünf Äpfel. Wenn wir die einmal haben, haben wir insgesamt natürlich fünf Äpfel. Wenn wir die dann nochmal haben, also zweimal die fünf Äpfel, dann haben wir insgesamt 10, nämlich  $5+5$ . Wenn wir dreimal die fünf Äpfel haben, kommen nochmal fünf dazu, also rechnen wir  $10+5$  und das ergibt 15. Das heißt, wir rechnen so oft Plus, wie die Zahl angibt, mit der wir malnehmen.“

Die Idee, für skalare Vielfache, die Addition zu übertragen, hilft uns auch bei Vektoren weiter – wie man die addiert haben wir schließlich schon gelernt.

- Was ist  $2 \cdot (1,2,3)$ , was ist  $3 \cdot (1,2,3)$ ? Berechnen Sie die beiden Aufgaben unter Anwendung der Grundschülerklärung.
- Leiten Sie aus diesen Beispielüberlegungen ab, wie man allgemein Rechnungen der Form  $s \cdot (x, y, z)$  ausführt und notieren Sie Ihre Gedanken.

#### AUFGABE 2 – Giebelform, Mittelpunkte und die Länge einer Säule ☆ ☆

Rechts sehen Sie die Hausfront des Hauses vom letzten Arbeitsblatt. Es ist klar, dass der Vektor, der als Giebelsäule markiert ist, darüber bestimmt, wie spitz oder flach das Dach aussehen wird.



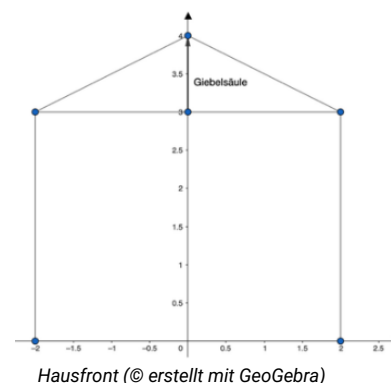
#### Schon gewusst?

Die Giebelsäule ist ein zentrales Tragwerkselement in einer

Dachkonstruktion, das die Lasten des Giebels sicher ableitet. Ihre Höhe ist wichtig für die Planung des Dachraums und beeinflusst die Gestaltung des Daches. Dachdeckerinnen und Dachdecker müssen daher die Giebelhöhe präzise berechnen, um sowohl eine stabile Konstruktion als auch eine ästhetische Dachform zu gewährleisten.

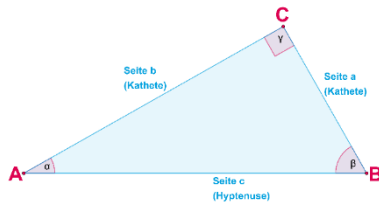
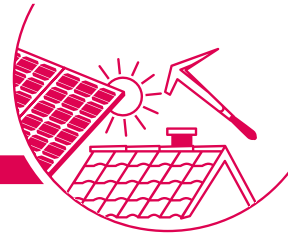


Dachkonstruktion  
(© Adobe Stock/  
trongnguyen)



Damit wir das aber auch quantitativ beobachten können, müssen wir das Problem grafisch in GeoGebra darstellen, den Fußpunkt der Giebelsäule berechnen und mit unterschiedlichen Giebelsäulen-Vektoren experimentieren.

- Nutzen Sie in GeoGebra den Grafikrechnermodus, um eine 2D-Darstellung wie in der Grafik der Hausfront zu erhalten. Die Koordinaten der Punkte sind  $(\pm 2, 0)$ ,  $(\pm 2, 3)$  und  $(0, 4)$ , für die Verbindungslinien können Sie Strecken nutzen.



### Grundlagen-Check:

Falls Sie eine Auffrischung zu rechtwinkligen Dreiecken benötigen, denken Sie daran: In einem rechtwinkligen Dreieck gibt es eine lange Seite (Hypotenuse) und zwei kurze Seiten (Katheten). Ein Winkel, der an der Hypotenuse anliegt, hat immer eine Gegenkathete (die gegenüber liegt) und eine Ankathete (die am Winkel anliegt). Der Tangens ist das Verhältnis von Gegen- zu Ankathete.

Kommen wir zum Berechnen des Fußpunkts für die Giebelsäule. Wir hätten den Giebel gerne mittig zwischen den Wänden, den Fußpunkt für die Säule also auch. Sie erinnern sich vielleicht noch, wie man den Mittelwert zweier Zahlen  $a$  und  $b$  berechnet:  $\frac{1}{2} \cdot (a + b)$ . Diese Rechnung geht auch mit Vektoren!

- b) Übertragen Sie die Rechenregeln für Vektoren auf dieses Beispiel, um die Mitte der Vektoren  $(2,3)$  und  $(-2,3)$  zu berechnen.
- c) Prüfen Sie, ob sich Ihr Ergebnis mit der Erwartung aus der Grafik der Hausfront deckt. Berechnen Sie außerdem den Giebelsäulen-Vektor.  
Testen Sie in GeoGebra verschiedene Vielfache der Giebelsäule. Bestimmen Sie grafisch, für welche Vielfache der Winkel ganz oben spitz (unter 90 Grad), flach (größer als 90 Grad, wie z.B. in der Grafik „Hausfront“ rechts oben) oder ein rechter Winkel ist.  
**Zusatzaufgabe:** Beweisen Sie mittels der Winkelsumme der Teildreiecke, dass für den gefundenen Wert oben tatsächlich ein rechtwinkliges Dreieck entsteht!
- d) Nutzen Sie die ablesbaren Längen und die Umkehrfunktion des Tangens, um den Neigungswinkel in unserem ersten Beispiel zu bestimmen. Recherchieren Sie anschließend zum Thema „Dachdeckung und Dachneigung“ und finden Sie Deckungen, die sich ohne Zusatzmaßnahmen für dieses Dach eignen!



### Schon gewusst?

Die Dachneigung gibt an, wie steil ein Dach ist – gemessen in Grad oder als Prozentsatz. Für Dachdeckerinnen und Dachdecker ist sie entscheidend: Je nach Neigung können verschiedene Materialien verwendet werden. Steil geneigte Dächer eignen sich z.B. für klassische Dachziegel, flachere Dächer benötigen eventuell spezielle Abdichtungen. Dachdeckerinnen und Dachdecker nutzen daher trigonometrische Berechnungen, um aus den Abmessungen der Dachkonstruktion die gegebene Neigung zu bestimmen – genau wie Sie es in dieser Aufgabe machen.

