

Lineare Zusammenhänge im Koordinatensystem untersuchen

Geradengleichung: Geraden aus Messwerten bestimmen

Steinmetzin Isabelle und Azubi Christian sollen die historische Freitreppe des Rathauses restaurieren. Bevor die Arbeiten beginnen, vermessen sie die alte Steintreppe aus Naturstein, die auf einem gemauerten Podest steht. Mithilfe von Punkten, Tabellen und Geraden untersuchen sie, wie sich der Verlauf der Treppe mathematisch beschreiben lässt. So lernen sie, lineare Zusammenhänge als Geradengleichungen darzustellen. Christian überlegt: „Reicht die Steigung allein aus, um eine Gerade eindeutig zu beschreiben?“

Lineare Geradengleichung

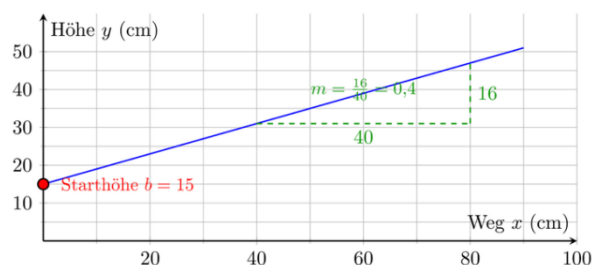
Mit einer Geradengleichung kann beschrieben werden, wie eine Gerade im Koordinatensystem verläuft. Eine lineare Funktion hat die Form: $f(x) = mx + b$

Dabei gilt:

- **x (Variable):** Der waagerechte Weg (z. B. in cm).
- **f(x) (Funktionswert):** Die erreichte Gesamthöhe an der Stelle x.
- **m (Steigung):** Beschreibt, wie viel Höhe im Verhältnis zum waagerechten Weg überwunden wird.
- **b (y-Achsenabschnitt):** Die Starthöhe bei $x = 0$.

Zwei Geraden können die **gleiche Steigung** haben und trotzdem **verschieden verlaufen**. Das ist dann der Fall, wenn der **y-Achsenabschnitt** unterschiedlich ist. Beginnt eine Gerade nicht bei Punkt (0|0) muss also **nicht nur die Steigung**, sondern auch der **y-Achsenabschnitt** berücksichtigt werden.

Bezogen auf Christians Überlegungen heißt das: Beginnt eine Treppe nicht auf Bodenhöhe, sondern zum Beispiel auf einem erhöhten Absatz, dann reicht die Steigung allein nicht aus, um ihren Verlauf zu beschreiben. Denn auch die Starthöhe muss bekannt sein.



Eine Geradengleichung aufstellen

Isabelle und Christian stehen vor der alten Rathautreppe. Damit sie die Stufen fachgerecht restaurieren können, brauchen sie die genauen Maße des Treppenverlaufs. Sie legen ein Koordinatensystem an die Treppe: Die x-Achse verläuft waagerecht am Fuß des Podests entlang, die y-Achse zeigt senkrecht nach oben.

Christian: Die Treppe beginnt erst oben auf dem Podest. Wie beschreiben wir das?

Isabelle: Das Podest ist 15 cm hoch. Die erste Stufenkante liegt also bei (0|15) – das ist unser y-Achsenabschnitt $b = 15$.

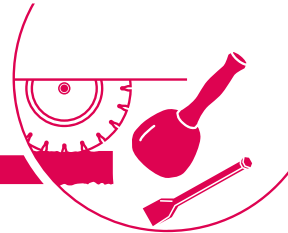
Christian: Und die Steigung?

Isabelle: Wir messen zwei Stellen auf der Treppenkannte: bei $x = 40$ cm liegt sie auf 31 cm, bei $x = 80$ cm auf 47 cm.

Dabei ergeben sich die Punkte $P_1(40|31)$ und $P_2(80|47)$, und daraus können wir die Steigung berechnen: $m = \frac{47-31}{80-40} = \frac{16}{40} = 0,4$

Christian: Wenn ich dann m und b einsetze, erhalte ich die Gleichung: $f(x) = 0,4x + 15$

Isabelle: Genau. Würde die Treppe direkt vom Boden starten, wäre $b = 0$ und die Gleichung würde lauten: $f(x) = 0,4x$



AUFGABE 1 ☆

Isabelle gibt Christian drei kleine Übungsbeispiele, damit er sicherer im Aufstellen von Geradengleichungen wird. Bestimme jeweils Steigung m und y -Achsenabschnitt b und stelle die Geradengleichung $f(x) = m \cdot x + b$ auf.

Tipp: Wenn ein Punkt bei $x = 0$ gegeben ist, kannst du b direkt ablesen.

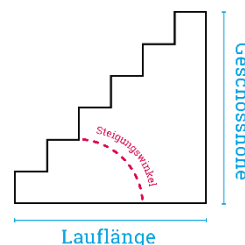
- $P(0|2)$ und $Q(4|6)$
- $P(0|1)$ und $Q(3|5)$
- Stelle die Geradengleichung mithilfe der Wertetabelle auf.

x	0	1	2	3
y	4	6	8	10



Schon gewusst?

Bei der Planung einer Treppe sind die Geschosshöhe und die Treppenauflänge wichtige Maße. Die Geschosshöhe gibt an, welchen Höhenunterschied die Treppe überwindet; die Treppenauflänge beschreibt die waagerechte Strecke vom Anfang bis zum Ende der Treppe. Je nach den Gegebenheiten vor Ort werden unterschiedliche Treppenformen gewählt: Eine Treppe kann gerade verlaufen oder in mehrere Läufe mit einem Podest aufgeteilt werden.



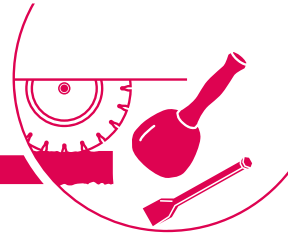
AUFGABE 2 ☆ ☆

Bei der Vermessung der historischen Freitreppe des Rathauses stellen Isabelle und Christian fest, dass die alten Stufen nicht mehr überall gleich verlaufen. Durch Abnutzung und frühere Ausbesserungen sind kleine Unregelmäßigkeiten entstanden. Um den Verlauf der Treppe genauer zu untersuchen, tragen sie mehrere Messpunkte in ein Koordinatensystem ein

- Übertrage die Messwerte in ein Koordinatensystem und skizziere die Treppe.

Punkt	x (waagerechter Weg in cm)	y (Höhe in cm)
Start	0	0
Stufe 1	30	20
Stufe 2	55	35
Stufe 3	90	50

- Berechne die Steigung m zwischen den aufeinanderfolgenden Stufen und vergleiche die Werte.
- Zeichne auf Grundlage der Messpunkte eine Gerade, die den ungefähren gleichmäßigen Verlauf der Treppe beschreibt (Ausgleichsgerade) ein.
- Gib die Funktionsgleichung dieser Ausgleichsgeraden an.
- Begründe, warum in dieser Aufgabe $b = 0$ ist.



AUFGABE 3 ☆☆☆

Für die Restaurierung der Freitreppe des Rathauses plant der Steinmetzbetrieb neue Stufen mit den Maßen $s = 16 \text{ cm}$ und $a = 30 \text{ cm}$. Das Podest, auf dem die Treppe beginnt, ist 15 cm hoch.

- Bestimme die Werte für s und a innerhalb der Toleranzgrenzen so, dass die Steigung **maximal** wird.
- Bestimme die Werte für s und a innerhalb der Toleranzgrenzen so, dass die Steigung **minimal** wird.
- Berechne für beide Fälle die Steigung m .
- Stelle für beide Fälle die Funktionsgleichung auf.



Schon gewusst?

Wenn Steinmetzinnen und Steinmetze Treppenstufen aus Naturstein herstellen und einbauen, sind kleine Abweichungen von den geplanten Maßen zulässig. Solche Abweichungen nennt man Toleranzen. Laut DIN 18065 darf das Nennmaß einer Stufe um maximal $\pm 0,5 \text{ cm}$ abweichen.

AUFGABE 4 ☆☆☆

Bei einer weiteren Natursteintreppe prüfen Isabelle und Christian, ob die gemessenen Werte zu einem gleichmäßigen Treppenverlauf passen. Die Treppe beginnt direkt auf Bodenhöhe.

	Stufe 1	Stufe 2	Stufe 3	Stufe 4
Abstand vom Treppenanfang (in cm)	25	50	75	100
Höhe (in cm)	20	45	60	80

- Zeichne die Stufen in ein Koordinatensystem ein. Überprüfe, welcher Messwert nicht zu einem gleichmäßigen Verlauf passt.
- Zeichne eine Steigungsgerade ein, die einen proportionalen Treppenverlauf darstellen würde.
- Bestimme die Funktionsgleichung für die Steigungsgerade.
- Bestimme die Höhe bei Stufe 6.



Schon gewusst?

In der Realität liegen Messwerte einer alten Treppe oft nicht alle genau auf einer Geraden. Mathematisch kann man dann eine Gerade einzeichnen, die den allgemeinen Verlauf der Punkte möglichst gut beschreibt. Eine solche Verteilung von Messpunkten nennt man auch **Punktwolke**.